## **培优课10 构造法求数列通项**

### **培优点一 型**

#### **审题指导**

典例1 已知在数列中，，（审题①形如的递推关系式可利用待定系数法）,则数列的通项公式为.

**解题观摩**

[解析]，…………审题①

由对应系数相等可得，即.设，则，且，故数列是以4为首项，2为公比的等比数列，所以，即.

#### **通性通法**

**形如的递推式求通项公式的3种类型及解题策略**

|  |  |
| --- | --- |
| 类型 | 解题策略 |
| 型 | 形如或的递推关系式可以化为或的形式，构造新的等比数列，求出通项公式，其中变量,是关键 |
| 型 |
| 型 | 形如的递推关系式可以两边同时除以后得到，转化为，再参考第一种形式求解即可 |

#### **培优训练**

##### **型条件变式**

1. 已知在数列中，，,求数列的通项公式.

[解析]因为，设，

整理得 ，对应系数相等可得解得所以.

设,,且，故数列是以8为首项，2为公比的等比数列，所以,

即.

##### **型条件变式**

2. 已知在数列中，，,求数列的通项公式.

[解析]因为，所以，令，则，所以.

设，整理得，对应系数相等可得，所以.设,则,且，

故数列是以为首项，为公比的等比数列，所以，

则，则.

### **培优点二 取倒数型**

#### **审题指导**

典例2 已知在正数数列（审题①正数数列可取倒数）中，，（审题②形如的递推式可考虑用取倒数法），则数列的通项公式为.

**解题观摩**

[解析]因为数列，…………审题①

，…………审题②

所以数列是首项为1，公差为2的等差数列，故，

即.

#### **通性通法**

1.形如的递推式求通项公式，两边同时取倒数转化为的形式，化归为型，求出数列的通项公式，从而可得的通项公式.

2.形如的递推式求通项公式，两边同时取倒数转化为，证明数列为等差数列，转化求解可得的通项公式.

#### **培优训练**

##### **型条件变式**

1. 已知在正数数列中，，，则数列的通项公式为.

[解析]因为数列为正数数列，，所以，

令，则，所以，设，整理得 ，对应系数相等可得，所以，

令，则，且，故数列是以2为首项，3为公比的等比数列，所以，则，即.

##### **型条件变式**

2. 已知在正数数列中，,，，则数列的通项公式为.

[解析]因为数列为正数数列，，所以，所以，即，又，故数列是以1为首项，1为公差的等差数列，所以，即.

### **培优点三 取对数型**

#### **审题指导**

典例3 已知在数列中，（审题①形如的递推式可两边同时取对数），，则数列的通项公式为.

**解题观摩**

[解析]由，…………审题①

两边取以2为底的对数，可得，设，则，且，

所以是首项为1，公比为2的等比数列，即，所以，即.

#### **通性通法**

在数列的递推关系中，遇上形如非线性关系的，如，可以两边取对数，把次数变成系数，转化为线性关系式,且，这样就变成了（,为常数）的形式,从而转化到熟悉的线性递推关系来求解.

#### **培优训练**

##### **递推关系中增加二次项的系数条件变式**

1. 若将典例3中的条件“”改为“”,则数列的通项公式为.

[解析]由,两边取以2为底的对数，可得.

设,，则，再设,整理得 ,对应系数相等可得，所以,设,,则,故数列是以2为首项，2为公比的等比数列，所以,则,即,所以.

##### **递推关系中增加一次项和常数项条件变式**

2. 已知在数列中，，，则数列的通项公式为.

[解析]由，两边加上2，可得，两边取以3为底的对数得，可得数列{是首项为1，公比为2的等比数列，即，所以.

### **\*培优点四 特征根型**

#### **审题指导**

典例4 已知在数列中，，（审题①形如的递推式可利用特征根法），则数列的通项公式为.

【注意】本例与培优点一的典例1同题，但此处采取特征根法求解.

**解题观摩**

[解析]…………审题① 解得特征根，所以变形得到，又，所以数列是以4为首项，2为公比的等比数列，所以，即.

#### **通性通法**

1.型，其特征根方程为，解为不动点，则,即数列是等比数列.特别地，当时，数列为常数列.

2.型，其特征根方程为，解为,.

（1）当特征根方程有两个相同的实数根，即时，数列是等差数列；

（2）当特征根方程有两个相异的实数根，即时，数列是等比数列；

（3）当特征根方程无实数根时，数列是周期数列.

3.型，其对应的特征根方程为，解为,.

（1）当时，数列的通项公式为，其中,由,,,和,2确定（即把,,,和,2代入，得到关于,的方程组）；

（2）当时，数列的通项公式为，其中,由,,,和,2确定（即把,,,和,2代入，得到关于,的方程组）.

#### **培优训练**

##### **型，1个特征根条件变式**

1. 设数列满足，，则数列的通项公式为.

[解析]因为，所以设，即，解得特征根，

因此变形为,两边同时取倒数可得，又，所以数列是以1为首项，为公差的等差数列，

所以，即.

##### **型，2个特征根条件变式**

2. 设数列满足，，则数列的通项公式为.

[解析]因为，所以设，即，解得特征根和，

因此变形为, ①

， ②

两式相除得，又，

所以数列是以2为首项，为公比的等比数列，所以，即.

##### **型条件变式**

3. 设数列满足,,，求数列的通项公式.

[解析]因为，设其特征根方程为，解得,，所以设，将,代入上式得解得故.